12. évfolyam gimnázium, I. forduló

pontozási útmutató

1. Mennyi az első n természetes szám összegének az 5-tel való osztási maradéka, ha ezen számok négyzetösszege nem osztható 5-tel?

   Megoldás:

   A pozitív egész számok ötös maradéka rendre: 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, … (1 pont)
   A négyzeteik ötös maradéka sorra: 1, 4, 4, 1, 0, 1, 4, … (2 pont)
   Látható, hogy akkor nem kapunk a négyzetek összegére 5-tel osztható összeget, ha az n-edik tag: $n = 5k + 1,\ k \in N$ vagy $n = 5k + 3,\ k \in N$. (2 pont)
   Ha $n = 5k + 1$, akkor az első n pozitív egész szám összege 1 maradékot ad 5-tel osztva. (2 pont)
   Ha $n = 5k + 3$, akkor az első n pozitív egész szám összege 1+2+3, azaz 1 maradékot ad 5-tel osztva. (2 pont)
   Tehát, ha az első n természetes szám négyzetének összege nem osztható 5-tel, akkor az első n természetes szám összege 5-tel osztva 1 maradékot ad. (1 pont)
   Összesen: 10 pont

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:
$$x(x + 5y) = 39,$$
$$y(4y - 9x) = -38.$$

   Megoldás:

   A két egyenletet összeadva $4y^2 + x^2 - 4xy = 1$, amit átalakítva (2 pont)
$$(2y - x)^2 = 1, \quad \text{(1 pont)}$$
   ahonnan
$$2y - x = 1,\ \text{vagy}\ 2y - x = -1, \quad \text{(2 pont)}$$
   innen
$$(2y - 1)(7y - 1) = 39,$$
   rendezve
$$14y^2 - 9y - 38 = 0, \quad \text{(1 pont)}$$
   ahonnan a megoldások:
$$(3; 2), \left(-\frac{19}{14}; -\frac{52}{14}\right). \quad \text{(2 pont)}$$
   A másik esetben pedig
$$(2y + 1)(7y + 1) = 39,$$
   innen
$$14y^2 + 9y - 38 = 0, \quad \text{(1 pont)}$$
   ebben az esetben a megoldások:
$$(-3; -2), \left(\frac{19}{14}; \frac{52}{14}\right). \quad \text{(1 pont)}$$
   Összesen: 10 pont

3. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a $P(3;-7)$ pontra és amiből az $y = x + 4$ és az $y = x - 3$ egyenesek 5 egység hosszú szakaszt metszenek ki!

<u>Megoldás:</u>

A $P(3;-7)$ pontra illeszkedő egyenesek paraméteres egyenlete:
$y + 7 = m(x - 3)$, $m \neq 1$, mert nem párhuzamos az adott egyenesekkel. (2 pont)
A fenti egyenes metszéspontja az $y = x + 4$ egyenessel: $x + 11 = mx - 3m$,
Innen

$$x = \frac{3m+11}{m-1} \text{ és } y = \frac{7m+7}{m-1}.$$ (2 pont)

$y = x - 3$ egyenessel való metszéspontjának koordinátái:

$$x = \frac{3m+4}{m-1} \text{ és } y = \frac{7}{m-1}.$$ (2 pont)

A két metszéspont távolságának négyzete:

$$\left(\frac{7}{m-1}\right)^2 + \left(\frac{7m}{m-1}\right)^2 = 25.$$ (1 pont)

Ahonnan

$$24m^2 + 50m + 24 = 0, \text{ és ebből } m_1 = -\frac{3}{4}, m_2 = -\frac{4}{3}.$$ (1 pont)

Két megfelelő egyenes van, melyek egyenlete:

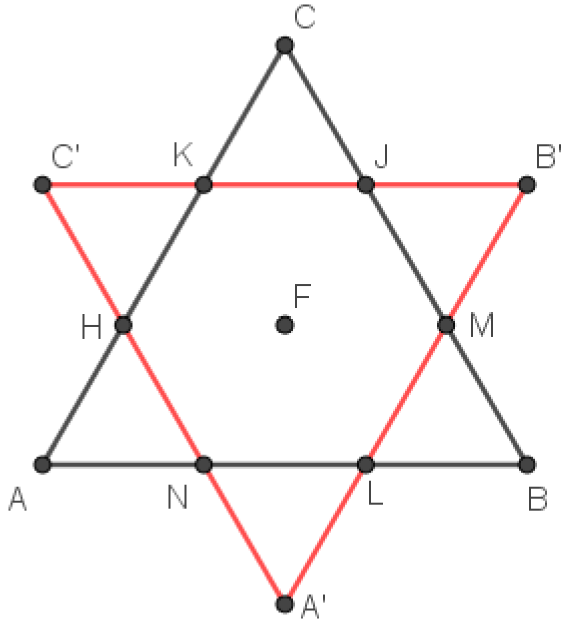
$$y = -\frac{4}{3}x - 3 \text{ és } y = -\frac{3}{4}x - \frac{19}{4}.$$ (2 pont)

Összesen: **10 pont**

4. Egy szabályos tetraédert elforgatunk az egyik forgástengelye körül 60°-kal. Mekkora a két tetraéder közös részének a térfogata és felszíne?

Megoldás:

Készítsünk ábrát a gúlák alaplapjairól:



AC 60°-os elforgatottja *A'C'*, amely *AC*-vel 60°-os szöget zár be. Így pl.: az *ANH* háromszög szabályos és egybevágó *A'LN* háromszöggel, ami egybevágó az *LBM* háromszöggel. (2 pont)

Tehát a két gúla alaplapjainak a közös része egy olyan szabályos hatszög, melynek alapéle a háromszög oldalának a harmada. (1 pont)

Ha a tetraéder éleit 3*a*-val jelöljük és a negyedik csúcsát *E*-vel, akkor a gúlák magassága *EF*, aminek hosszát az *AFE* derékszögű háromszögből kapjuk. (1 pont)

$$EF^2 = AE^2 - AF^2 = 9a^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3a\right)^2 = 6a^2,\ EF = \sqrt{6}a.$$ (2 pont)

A szabályos hatszög alapú gúla térfogata:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\left(a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6\right)\cdot\sqrt{6}a = \frac{\sqrt{18}}{2}a^3.$$ (1 pont)

Az oldallapmagasságok: Ha pl. *HK* felezőpontját *T* jelöli, akkor a *TFE* derékszögű háromszögből $TF = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3a = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$

$$m = \sqrt{6a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{2}a.$$ (2 pont)

A szabályos hatszög alapú gúla felszíne:

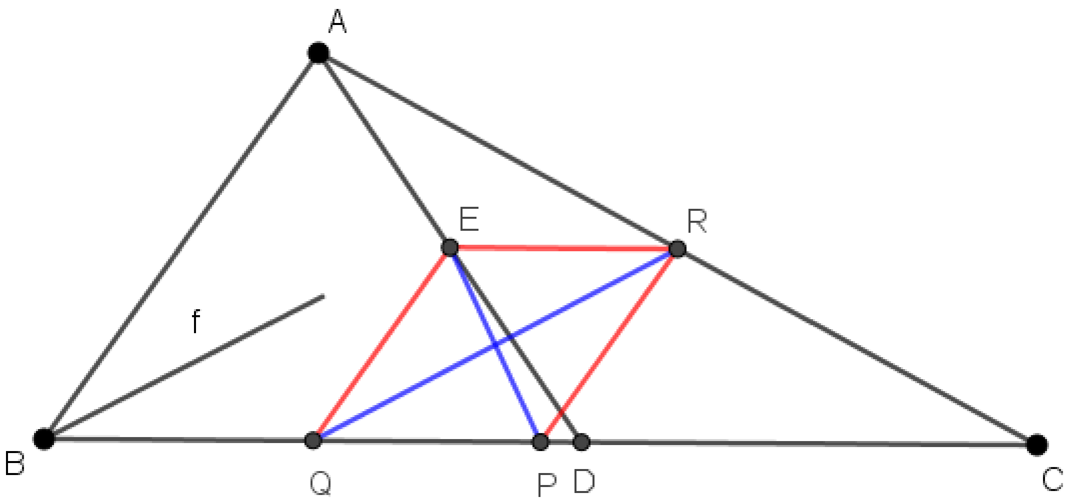
$$A = a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6 + 6\frac{\sqrt{27}}{4}a^2 = \frac{3a^2}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{27}) = 6\sqrt{3}a^2.$$ (1 pont)

Összesen: **10 pont**

5. Az *ABC* háromszögben *BC* > *AB*. A *D* pont az *BC* oldal olyan pontja, hogy *CD* = *AB*. Az *E* jelölje az *AD* szakasz, illetve a *P* a *BC* szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy az *ABC* szög szögfelezője merőleges az *EP* egyenesre!

Megoldás:

Készítsünk ábrát a feladatnak megfelelően, és használjuk annak jelöléseit:



A jó ábra elkészítése. (1 pont)

Az *AD* szakasz *E* felezési pontján keresztül húzzunk párhuzamost *DC*-vel, ez a párhuzamos *AC*-t *R*-ben metszi. Így *ER* az *ADC* háromszög *DC*-hez tartozó középvonala, ezért

$$ER = \frac{DC}{2} = \frac{AB}{2}.$$ (2 pont)

Mivel *R* az *AC* szakasz felezőpontja, *P* a *BC* szakasz felezőpontja, így *PR* az *ABC* háromszög *AB* oldalhoz tartozó középvonala, tehát

$$RP = \frac{AB}{2}.$$ (2 pont)

Az *E* ponton keresztül húzott *AB*-vel párhuzamos egyenes *BC*-t *Q*-ban metszi. Az *EQ* középvonal az *ABD* háromszögben, ezért

$$EQ = \frac{AB}{2}.$$ (1 pont)

A *QPRE* négyszögben $ER = RP = EQ, RP||EQ$, ezért a négyszög rombusz. (2 pont)

Tehát *QR* merőleges *EP*-re, és felezi az *EQP* szöget. Az *ABC* szög egyállású *EQC* szöggel, így szögfelezőik párhuzamosak, azaz *ABC* szög szögfelezője merőleges *EP*-re. (2 pont)

Összesen: **10 pont**

6. Egy $2n \times 2n$ négyzettábla mezőin $3n$ korongot helyeztünk el úgy, hogy bármely mezőn legfeljebb egy korong legyen. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatból eltávolíthatunk n sort és n oszlopot úgy, hogy a megmaradt mezőkön egyetlen korong se legyen!

Megoldás:

Kezdjük a sorokkal. Mivel a táblázatban véges sok korong van, így van legalább egy olyan sor, melyen a legtöbb korong áll. Az első lépésben hagyjuk el ezt a sort, vagy egy ilyet. (2 pont)
Ez alapján hagyjuk el a második, harmadik,…, n-edik sort. (1 pont)
Ekkor a megmaradt n sorban nem lehet n-nél több korong. Mert, ha legalább $n+1$ korong maradna, akkor lenne olyan sor, melyen legalább két korong lenne. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy az elhagyott sorok mindegyikén legalább két korong volt. (2 pont)
Ebből az következik, hogy kezdetben a táblán legalább $2n + n + 1 = 3n + 1$ korong volt, ami ellentmond annak, hogy $3n$ korongot tettünk a táblára. (2 pont)
Ezek alapján az n sor törlése után a táblán legfeljebb n korong lehet, így legfeljebb n oszlop lesz, amin van korong, így ezek törlésével a megmaradt táblán nem lesz korong. (1 pont)

Összesen: 10 pont